



e-financebook

Cap. 3. Tasa de Interés Compuesto

Interés Compuesto

Cuando en cierta ocasión se le preguntó al Barón Rothschild, uno de los banqueros más ricos, si recordaba cuales eran las 7 maravillas del mundo, respondió:

“No, pero se cual es la octava: esta octava maravilla deberíamos utilizarla todos para lograr lo que nos proponemos y se llama interés compuesto”.

Definición

El Interés compuesto no es más que el interés simple aplicado de manera sucesiva a un capital que crece a medida que se suma los intereses al capital.

En el interés simple, el capital original sobre el que se calculan los intereses, permanece constante durante toda la operación; en cambio, en el interés compuesto, **los intereses generados en un período de tiempo se unen al capital original para incrementarlo**, y así generar nuevos y mayores intereses en el siguiente período.

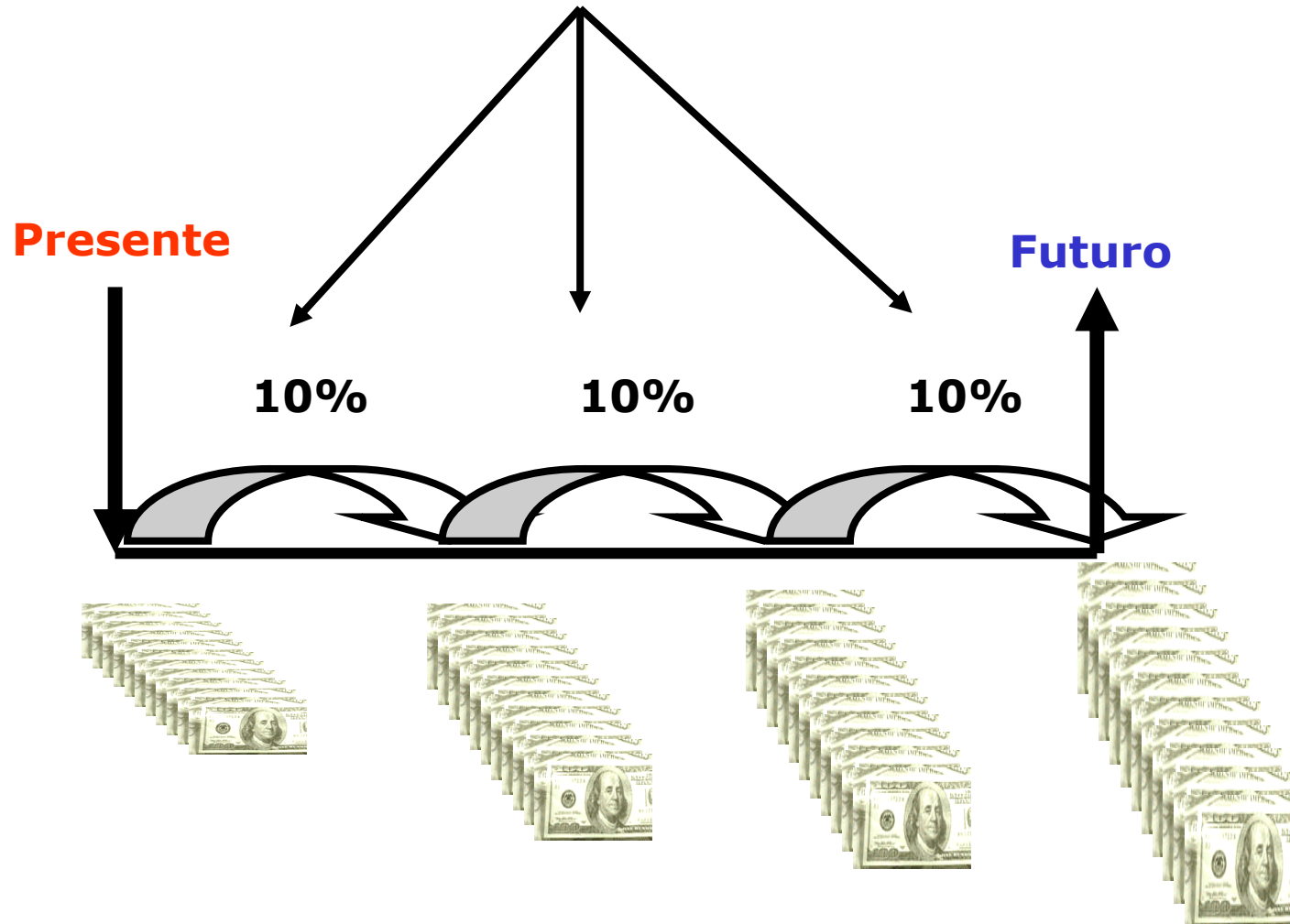
Período de Capitalización

Es el **período de tiempo fijo** donde **los intereses ganados, se convierten en nuevo capital para el siguiente período de tiempo.** Este puede estar expresado en cualquier unidad de tiempo, pudiendo ser anual, semestral, cuatrimestral, trimestral, bimestral, mensual, quincenal, diario, etc. Este período de tiempo se constituye en el período de acumulación o período de capitalización.

Período de Capitalización

Por lo que, en finanzas y cuando se aplique una tasa de interés, lo que debemos observar primero es, **¿cuál es el período de capitalización?**, que no es sino la **unidad de tiempo** en la que **se suma al capital anterior un nuevo monto de capital**, el cual procede de **reinvertir** en la siguiente unidad de tiempo los **intereses generados** en el período de tiempo anterior; al proceso continuo de hacer esta actividad se le conoce como **CAPITALIZACIÓN** o **ACUMULACIÓN**.

Período de Capitalización



Período de Capitalización

Antes de resolver cualquier problema de finanzas, debemos hacernos la siguiente pregunta:

¿Quién manda?

La respuesta es muy simple..... SIEMPRE manda el período de capitalización!!!!!!!!!!

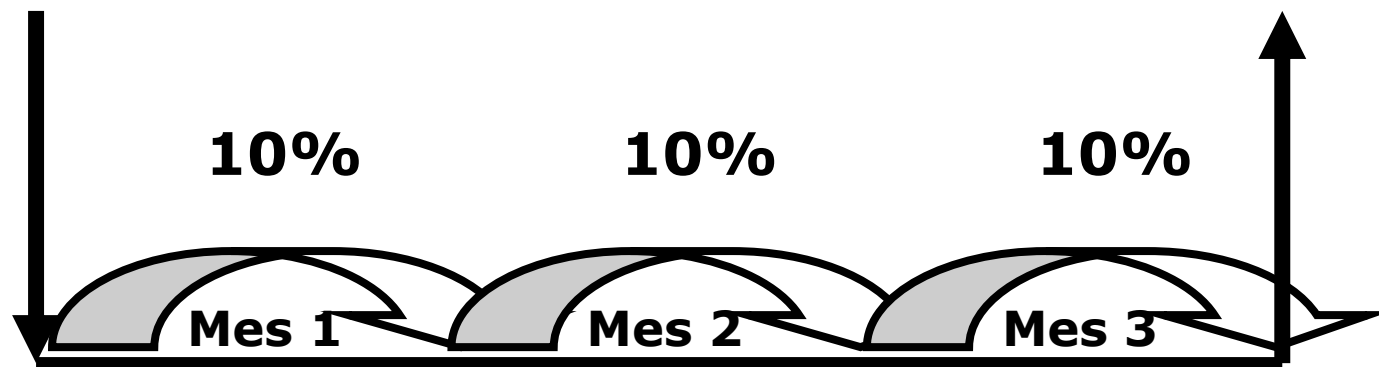
Si no lo conoce con anterioridad o no se indica, **DEBERÁ ASUMIR** que este se produce en forma **diaria**.

Como calcular el interés

El dinero crecerá parte a parte como producto de la capitalización

Presente

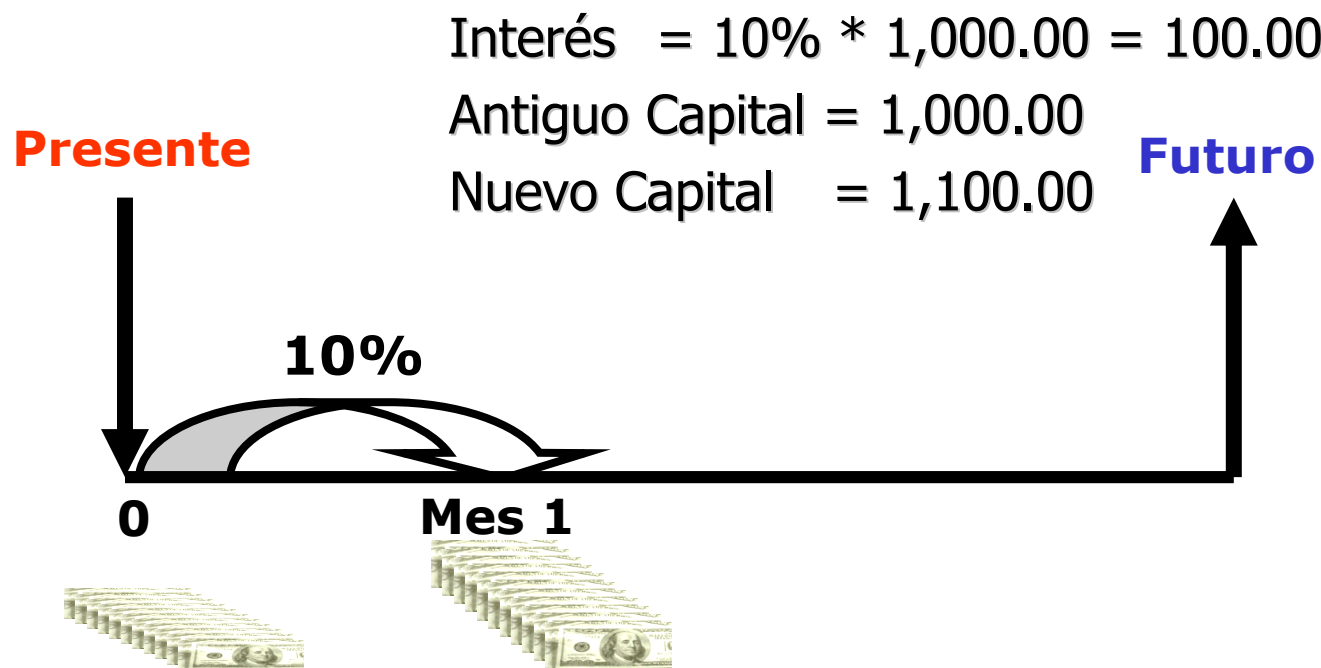
Futuro



Por ejemplo, si tengo S/. 1,000.00 y lo invierto **durante tres períodos mensuales** a una **tasa compuesta de 30% trimestral capitalizable mensualmente**. ¿qué sucederá mes a mes?

Capitalización

Los S/. 1,000.00 iniciales producirán al final del primer período mensual:



Capitalización

Los S/. 1,100.00 producirán al final del segundo período mensual:

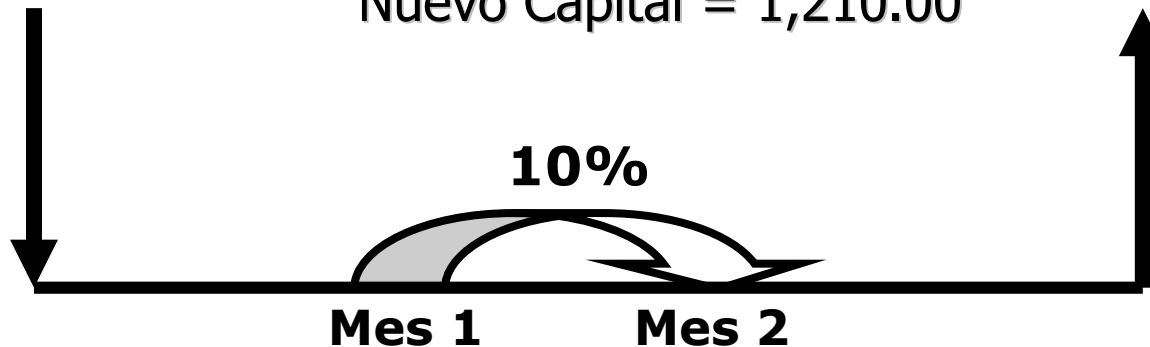
$$\text{Interés} = 10\% * 1,100.00 = 110.00$$

$$\text{Antiguo Capital} = 1,100.00$$

$$\text{Nuevo Capital} = 1,210.00$$

Presente

Futuro



Mes 1

Mes 2



Capitalización

Los S/. 1,210.00 producirán al final del tercer período mensual:

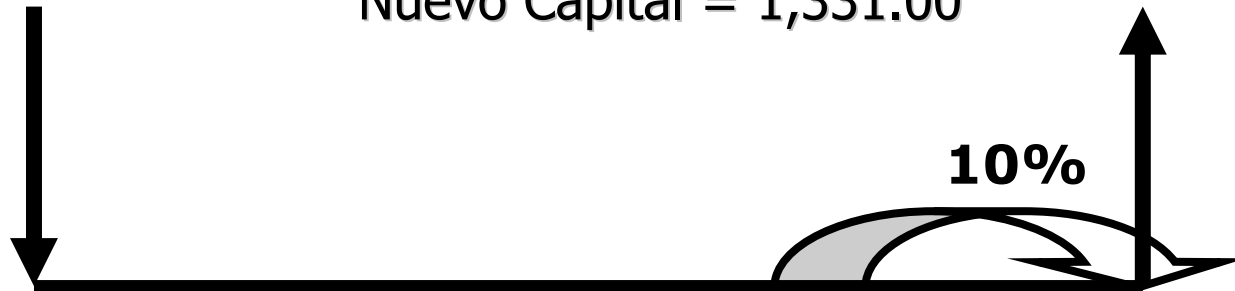
$$\text{Interés} = 10\% * 1,210.00 = 121.00$$

$$\text{Antiguo Capital} = 1,210.00$$

$$\text{Nuevo Capital} = 1,331.00$$

Presente

Futuro



Mes 2

Mes 3



Conclusión

Un **capital inicial de S/. 1,000.00** expuesto a una tasa de interés compuesta de **30%** trimestral capitalizable mensualmente, se convertirá **luego de tres períodos mensuales**, como consecuencia del efecto de la capitalización, en **S/. 1,331.00**.

De lo anterior, podemos afirmar que **de manera efectiva nuestro capital creció en S/ 331.00**, lo que expresado como porcentaje del capital inicial, diremos que **creció en 33.1%** (ojo, y no 30% como podríamos haber creído inicialmente)

Tasa Nominal y Tasa efectiva

Cuando la tasa de interés compuesta convenida en una operación financiera se capitaliza más de una vez por año, recibe el nombre de **Tasa de Interés Nominal** y a su respectivo incremento porcentual efectivo respecto del capital inicial se le denomina **Tasa de Interés Efectiva**.

Por ejemplo en el caso anterior, podríamos afirmar que la operación se realizó a una **Tasa Nominal Trimestral de 30% con capitalización mensual**, y que en 3 meses produjo una **Tasa Efectiva Trimestral de 33.1%**.

Tasa Nominal y Tasa efectiva

Finalmente y generalizando podríamos decir que **nuestro dinero creció de manera efectiva en un trimestre** como sigue:

$$\text{Tasa Efectiva} = \frac{\text{Futuro}}{\text{Presente}} - 1 = \frac{1,331.00}{1,000.00} - 1 =$$

$$\text{Tasa Efectiva Trimestral} = 33.1\%$$

Tasa Nominal y Tasa efectiva

Por lo que concluimos que una (TNT) Tasa Nominal Trimestral de 30% con capitalización mensual genera una riqueza incremental en tres meses de S/. 331.00, la que a su vez equivale a una Tasa Efectiva Trimestral (TET) de 33.1%!!!.....

Ahora bien, ¿Podríamos afirmar que una (TNB) Tasa Nominal Bimestral de 20% con capitalización mensual genera una Tasa Efectiva Bimestral de 21%? ¿Si o No? ¿Por qué?

Tasa Nominal y Tasa efectiva

La respuesta es **SI!!!!**, sino recordemos nuestros cálculos del ejercicio pasado para el segundo mes:

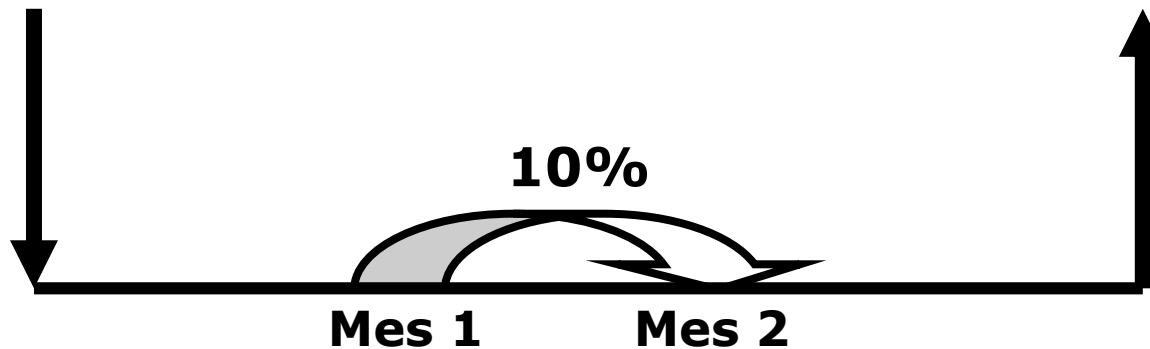
$$\text{Interés} = 10\% * 1,100.00 = 110.00$$

$$\text{Antiguo Capital} = 1,100.00$$

$$\text{Nuevo Capital} = 1,210.00$$

Presente

Futuro



Tasa Nominal y Tasa efectiva

Es así que mis S/. 1,000.00 iniciales expuestos a una **Tasa de Interés Nominal Bimestral de 20% con capitalización mensual**, ha generado un incremento efectivo de S/. 210.00 en dos meses, permitiéndome terminar ese período de tiempo con S/. 1,210.00. Finalmente podría decir que **nuestro dinero creció de manera efectiva en un bimestre** de la siguiente manera:

$$\text{Tasa Efectiva} = \frac{\text{Futuro}}{\text{Presente}} - 1 = \frac{1,210.00}{1,000.00} - 1 = 21\%$$

Normas a seguir

- ✓ La tasa de interés **siempre ingresa a las fórmulas expresada en tanto por ciento**, es decir dividida entre 100.
- ✓ Cuando no se indica nada acerca de la **tasa de interés nominal**, deberá asumir que esta se encuentra expresada en términos **anuales**.
- ✓ De la misma manera, si la **capitalización** no está definida deberá asumir que la tasa capitaliza **diariamente**.
- ✓ La tasa de **interés** y el **tiempo** siempre deberán de estar expresados en la **misma unidad de medida**, siendo que **siempre manda el período de la capitalización**

Deducción de fórmulas a utilizar

Si recibimos como dato una TN expresada en un período de tiempo 1 y que capitaliza en otro período de tiempo 2 (generalmente $t_2 \leq t_1$). ¿Cómo es que podemos concluir cual es el monto de dinero que puedo acumular luego de transcurrido un tiempo 3?

Para facilitar el manejo metodológico imaginemos que contamos con S/. 1,000.00 depositados en una cuenta que ofrece una (TNA) Tasa Nominal Anual de 12% con capitalización mensual y que deseamos conocer cuanto tenemos luego de 1 trimestre. ¿Cómo debemos proceder?

Deducción de fórmulas a utilizar

- ✓ Designemos a:

$$C = 1,000.00$$

TNA de 12% capitaliza mensualmente

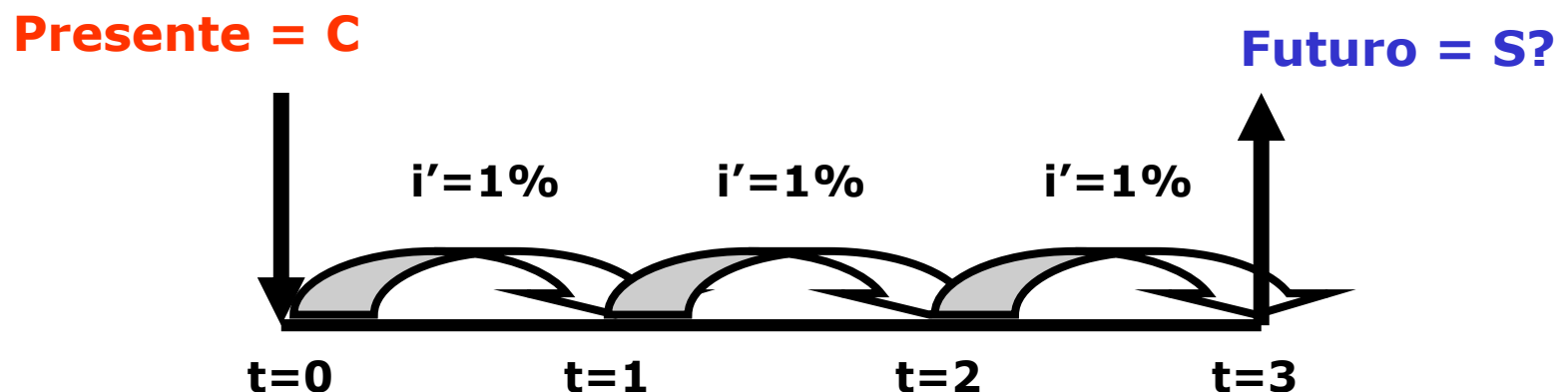
$$t = 1 \text{ trimestre} = 3 \text{ meses}$$

- ✓ En un mes la TNA con capitalización mensual generará una TNM (llamaremos i' a la tasa de interés nominal que ocurre en el período de capitalización) de:

$$i' = \frac{\text{TNA}}{m} = \frac{12\%}{12} = 1\% = \text{TNM}$$

Deducción de fórmulas a utilizar

- ✓ Luego, si enumeramos nuestra línea de tiempos desde $t=0$ (CERO) -momento en el que se inicia el proceso de inversión-, hasta $t=3$ (meses) momento en el que deseamos averiguar el estado de nuestro capital invertido, tendríamos lo siguiente:



Deducción de fórmulas a utilizar

- ✓ En el momento $t=0$ de la inversión ocurriría lo siguiente:

$$S_{(0)} = C$$

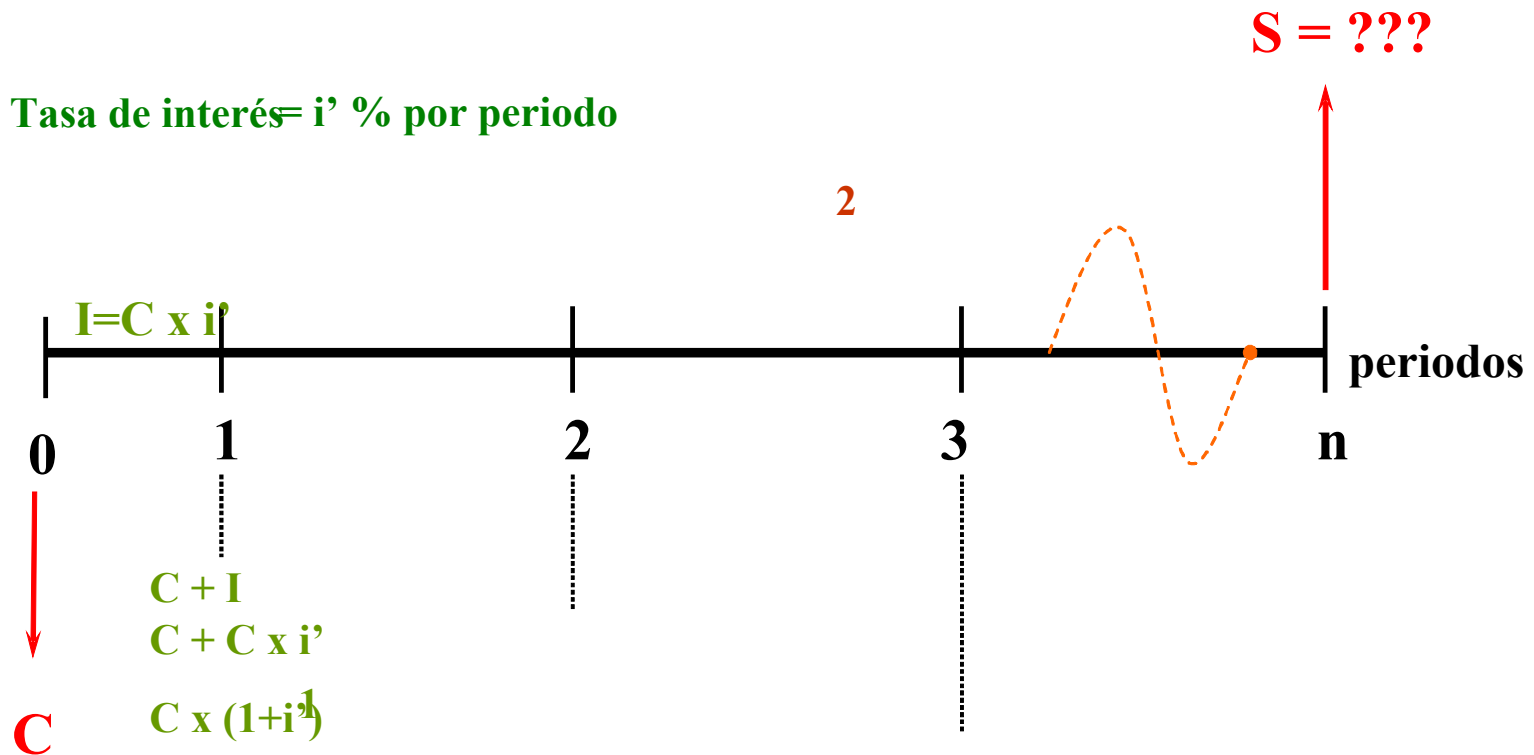
- ✓ Y, luego de un período mensual, podemos tener nuestro capital invertido "C" y los intereses generados en primer período de capitalización "I", por tanto:

$$S_{(1)} = S_{(0)} + I_{(1)} = S_{(0)} + i' * S_{(0)} =$$

$$S_{(1)} = C + i' * C = \mathbf{[C*(1+i')]}$$

Deducción de fórmulas a utilizar

Tasa de interés = i' % por periodo



Deducción de fórmulas a utilizar

- ✓ Ahora, si exponemos nuestro nuevo capital (el original más la capitalización de los intereses) a un nuevo período de capitalización tendríamos:

$$S_{(2)} = S_{(1)} + I_{(2)} = S_{(1)} + i' * S_{(1)}$$

$$S_{(2)} = [C*(1+i')] + i' * [C*(1+i')] =$$

Y si factorizamos el factor común $[C*(1+i')]$

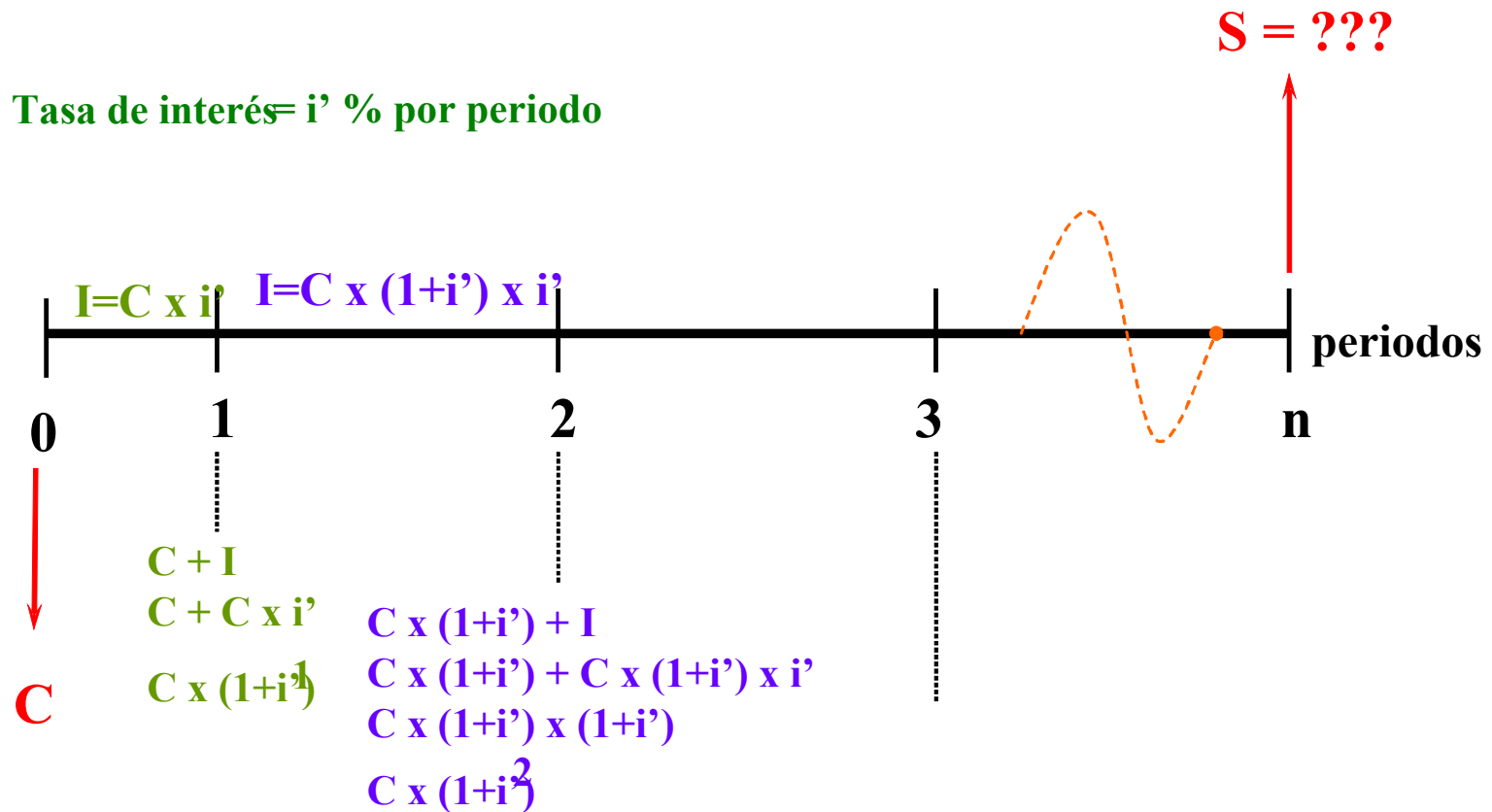
$$S_{(2)} = [C*(1+i')]*(1+i') =$$

Y agrupamos factores $(1+i')$ comunes:

$$S_{(2)} = [C*(1+i')^2]$$

Deducción de fórmulas a utilizar

Tasa de interés = i' % por periodo



Deducción de fórmulas a utilizar

- ✓ Si ahora nos vamos al tercer y último período, y repetimos el mismo proceso tendríamos:

$$S_{(3)} = S_{(2)} + I_{(3)} = S_{(2)} + i' * S_{(2)}$$

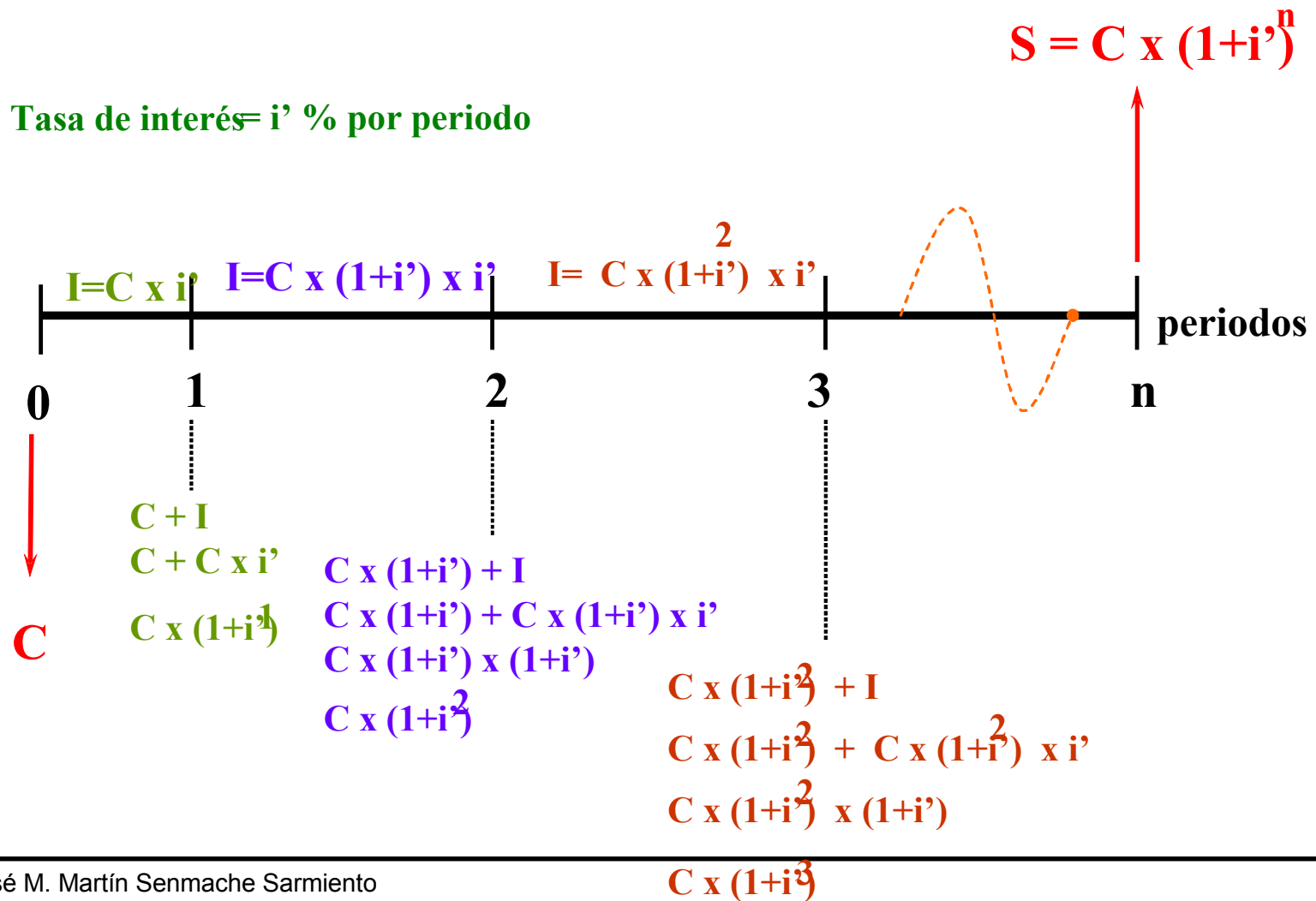
$$S_{(3)} = [C*(1+i')^2] + i' * [C*(1+i')^2] =$$

$$S_{(3)} = [C*(1+i')^2] * (1+i') =$$

$$S_{(3)} = C*(1+i')^3$$

Deducción de fórmulas a utilizar

Tasa de interés = i' % por periodo



Deducción de fórmulas a utilizar

- ✓ Finalmente vemos que el dinero sigue en el futuro una regla muy sencilla de aplicar, la que consiste en indicar que el dinero, luego de "n" períodos de capitalización continuos, iguales, al cual se le aplicó el mismo interés nominal i' , se habrá transformado en:

$$S = C * (1 + i')^n$$

Siendo " C " el capital inicial, " i' " la tasa de interés en el período de capitalización, " n " el número de períodos al cual se encuentra afecto mi dinero a esa tasa y " S " el capital final.

Resumen Metodológico

Para realizar cualquier cálculo con interés compuesto deberemos seguir los siguientes pasos:

- ✓ En primer lugar debemos preguntarnos: **¿cuántos períodos de capitalización "m" existen en el tiempo en el que se encuentra expresada la tasa nominal que recibí como dato?**

Para el caso $m=12$, puesto que existen 12 períodos de capitalización mensuales en 1 año (tiempo en el que se expresó la tasa nominal dada como dato)

Resumen Metodológico

- ✓ En segundo lugar se deberá proceder a **calcular el valor de la Tasa Nominal en el período de capitalización, tasa que ha sido llamada como i'** , la que para el caso sería:

$$i' = \text{TNM} = \frac{\text{TNA}}{m} = \frac{12\%}{12} = 1\%$$

Resumen Metodológico

- ✓ Luego debemos preguntarnos: **¿cuántos períodos de capitalización "n" existen en el tiempo en el cual mi dinero estará expuesto a esa tasa?**

Para el caso diremos que $n=3$, puesto que existen 3 períodos mensuales en 1 trimestre

Resumen Metodológico

- ✓ Finalmente debemos **aplicar la fórmula** deducida anteriormente y conocer que después de un trimestre tendremos:

$$S = C * (1 + i') ^ n =$$

$$S = 1,000 * (1 + 1\%) ^ 3 =$$

$$S = 1,030.30$$

Resumen Metodológico

- ✓ Y que si bien es cierto una Tasa Nominal Anual de 12% con capitalización mensual genera una Tasa Nominal Mensual de 1%, esta a su vez produce una Tasa Efectiva Trimestral calculada como:

$$\text{Tasa Efectiva Trimestral} = \frac{\text{Futuro}}{\text{Presente}} - 1$$

$$\text{Tasa Efectiva Trimestral} = \frac{1,030.30}{1,000.00} - 1 = 3.03\%$$

Fórmula a utilizar

Para desarrollar los problemas que involucran Tasa Nominales deberá tener en cuenta que:

$$S = C * (1+i')^n \quad \text{Y si consideramos que } i' = \frac{TN}{m}$$

$$S = C * (1 + \frac{TN}{m})^n$$

Y que:

$$TEP = \frac{\text{Futuro} - \text{Presente}}{\text{Presente}} = \frac{\text{Futuro}}{\text{Presente}} - 1$$

Leyenda

S: Futuro.

C: Presente.

m: es el número de veces (en días, meses, etc.) que se repite el período de capitalización, en el tiempo en el que se encuentra expresada la tasa nominal contratada.

i' : es igual a la tasa nominal contratada dividida entre el valor de “m”.

n: es el número de veces (en días, meses, etc.) que se repite el período de capitalización, en el tiempo en el cual mi dinero está afecto a esa tasa nominal.

TNP: Tasa Nominal en el período de análisis.

TEP: Tasa efectiva en el período de análisis.

Ejemplo 1

Si invertimos S/. 1,000.00 en un negocio que nos rinde una TNS de 6% con capitalización mensual.
¿Cuánto rendirá en 1 cuatrimestre?

m : ¿Cuántos meses hay en 1 semestre? ... 6

n : ¿Cuántas meses hay en 1 cuatrimestre? ... 4

$$S = 1,000 * (1 + \frac{6\%}{6})^4 = 1,040.60$$

Y su respectiva tasa efectiva cuatrimestral de crecimiento sería:

$$TEC = \frac{1,040.60}{1,000.00} - 1 = 4.06\%$$

Ejemplo 2

Si invertimos el mismo monto a la misma tasa nominal, pero en un lapso de 1 año. ¿Cuáles serían los resultados?

m : ¿Cuántos meses hay en 1 semestre? ... 6

n : ¿Cuántas meses hay en 1 año? ... 12

$$S = 1,000 * \left(1 + \frac{6\%}{6}\right)^{12} = 1,126.83$$

Y su respectiva tasa efectiva anual de crecimiento sería:

$$TEA = \frac{1,126.83}{1,000.00} - 1 = 12.683\%$$

Ejemplo 3

¿Cuál sería la diferencia con los dos casos anteriores, si es que la capitalización es diaria?

Caso 1:

m : ¿Cuántos días hay en 1 semestre? ... 180

n : ¿Cuántas veces hay en 1 cuatrimestre? ... 120

$$S = 1,000 * \left(1 + \frac{6\%}{180}\right)^{120} = 1,040.80$$

Y su respectiva tasa efectiva cuatrimestral de crecimiento sería:

$$TEC = \frac{1,040.80}{1,000.00} - 1 = 4.08\%$$

Ejemplo 4

Caso 2:

m : ¿Cuántos días hay en 1 semestre? ... 180

n : ¿Cuántas días hay en 1 año? ... 360

$$S = 1,000 * (1 + \frac{6\%}{180})^{360} = 1,127.47$$

Y su respectiva tasa efectiva anual de crecimiento sería:

$$TEA = \frac{1,127.47}{1,000.00} - 1 = 12.747\%$$

¿Puedo sacar alguna conclusión importante respecto de la disminución en el lapso de tiempo en que se mide el período de capitalización?

Si, que el crecimiento efectivo del capital aumenta!!!!!!

Ejemplo 5

Si invertimos S/. 1,000.00 en un negocio que nos rinde una TNT de 30% y que capitaliza mensualmente, cuando rendirá en los 3 meses:

m : ¿Cuántos meses hay en 1 trimestre? ... 3

n : ¿Cuántas meses hay en 3 meses? ... 3

$$S = 1,000 * (1 + \underline{30\%})^3 = 1,331.00$$

Y su respectiva tasa efectiva de crecimiento sería:

$$\text{Tasa efectiva trimestral} = \frac{1,331.00 - 1,000}{1,000.00} \Rightarrow 33.1\%$$

Ejemplo 6

Si invertimos el mismo monto a la misma tasa nominal , pero en un lapso de 1 año. ¿Cuáles serían los resultados?

m : ¿Cuántos meses hay en 1 trimestre? ... 3

n : ¿Cuántas meses hay en 1 año? ... 12

$$S = 1,000 * (1 + \frac{30\%}{3})^{12} = 3,138.43$$

Y su respectiva tasa efectiva de crecimiento sería:

$$\text{Tasa efectiva anual} = \frac{3,138.43 - 1,000}{1,000.00} \Rightarrow 213.843\%$$

Ejemplo 7

¿Cuál sería la diferencia con los dos casos anteriores, si es que la capitalización es diaria?

Caso 1:

m : ¿Cuántos días hay en 1 trimestre? ... 90

n : ¿Cuántas días hay en 3 meses? ... 90

$$S = 1,000 * (1 + \frac{30\%}{90})^{90} = 1,349.19$$

Y su respectiva tasa efectiva de crecimiento sería:

$$\text{Tasa efectiva trimestral} = \frac{1,349.19 - 1,000}{1,000.00} \Rightarrow 34.919\%$$

$$1,000.00$$

Ejemplo 8

Caso 2:

m : ¿Cuántos días hay en 1 trimestre? ... 90

n : ¿Cuántas días hay en 1 año? ... 360

$$S = 1,000 * \left(1 + \frac{30\%}{90}\right)^{360} = 3,313.50$$

Y su respectiva tasa efectiva de crecimiento sería:

$$\text{Tasa efectiva anual} = \frac{3,313.50 - 1,000}{1,000.00} \Rightarrow 231.35\%$$

¿Puede sacar alguna conclusión teórica importante respecto de la disminución en el lapso de tiempo en que se mide el período de capitalización?

Ejercicios de Aplicación

Desarrolle los problemas presentados en la separata

